

Funzioni differenziabili. Definizione ed esempi

FUNZIONI DIFFERENZIABILI - DEFINIZIONE

Definizione 1. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un aperto e $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Diciamo che F è differenziabile nel punto $X_0 \in \Omega$ se esiste un vettore $v \in \mathbb{R}^d$ tale che

$$F(X) = F(X_0) + v \cdot (X - X_0) + o(|X - X_0|),$$

ovvero se

$$\lim_{X \rightarrow X_0} \frac{F(X) - F(X_0) - v \cdot (X - X_0)}{|X - X_0|} = 0.$$

DERIVABILITÀ E GRADIENTE DI UNA FUNZIONE DIFFERENZIABILE

Teorema 2 (Le funzioni differenziabili sono anche derivabili). Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un aperto ed $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile in un punto $(x_0, y_0) \in \Omega$, ovvero tale che

$$F(x, y) = F(x_0, y_0) + v \cdot (x - x_0, y - y_0) + o\left(|(x - x_0, y - y_0)|\right),$$

per un qualche vettore

$$v = (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

Allora F è **derivabile** in (x_0, y_0) , ovvero esistono le **derivate parziali**

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + t, y_0) - F(x_0, y_0)}{t}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) := \lim_{s \rightarrow 0} \frac{F(x_0, y_0 + s) - F(x_0, y_0)}{s}.$$

Inoltre,

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = a \quad e \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = b,$$

o in altri termini v è il **gradiente** di F in (x_0, y_0) :

$$v = \nabla F(x_0, y_0).$$

Corollario 3. Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto ed $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile in un punto $X_0 \in \Omega$. Allora, F è differenziabile in X_0 se e solo se

$$\lim_{X \rightarrow X_0} \frac{F(X) - F(X_0) - (X - X_0) \cdot \nabla F(X_0)}{|X - X_0|} = 0. \quad (1)$$

Dimostrazione. Osserviamo che se vale (2), allora F è differenziabile per definizione. Viceversa, se F è differenziabile, allora esiste $v \in \mathbb{R}^d$ tale che

$$\lim_{X \rightarrow X_0} \frac{F(X) - F(X_0) - v \cdot (X - X_0)}{|X - X_0|} = 0. \quad (2)$$

Ma allora per [Teorema 2](#), abbiamo che $v = \nabla F(X_0)$. □

DIFFERENZIABILITÀ E CONTINUITÀ

Teorema 4 (Differenziabile \Rightarrow continua). *Siano Ω un insieme aperto di \mathbb{R}^d e sia $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Se F è differenziabile nel punto $X_0 \in \Omega$, allora F è continua in X_0 .*

Dimostrazione. Per ipotesi, abbiamo che

$$\lim_{X \rightarrow X_0} \frac{|F(X) - F(X_0) - (X - X_0) \cdot \nabla F(X_0)|}{|X - X_0|} = 0. \quad (3)$$

Usando la disuguaglianza triangolare e la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz, abbiamo

$$\begin{aligned} |F(X) - F(X_0)| &\leq |F(X) - F(X_0) - (X - X_0) \cdot \nabla F(X_0)| + |(X - X_0) \cdot \nabla F(X_0)| \\ &\leq |X - X_0| \frac{|F(X) - F(X_0) - (X - X_0) \cdot \nabla F(X_0)|}{|X - X_0|} + |X - X_0| |\nabla F(X_0)|. \end{aligned}$$

Di conseguenza, usando (3) ed il fatto che $\lim_{X \rightarrow X_0} |X - X_0| = 0$, otteniamo che

$$\lim_{X \rightarrow X_0} |F(X) - F(X_0)| = 0. \quad \square$$

Esempio 5. *La funzione*

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

non è continua in zero e di conseguenza non è differenziabile in zero.

SOMMA E PRODOTTO DI FUNZIONI DIFFERENZIABILI

Teorema 6 (Somma e prodotto di funzioni differenziabili). *Siano Ω un insieme aperto di \mathbb{R}^d e siano $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e $G : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni differenziabili nel punto $X_0 \in \Omega$. Allora:*

(a) *la somma $F + G$ è differenziabile in X_0 e*

$$\nabla(F + G) = \nabla F + \nabla G.$$

(b) *il prodotto FG è differenziabile in X_0 e*

$$\nabla(FG) = G\nabla F + F\nabla G.$$

Dimostrazione. Per ipotesi, abbiamo:

$$\lim_{X \rightarrow X_0} \frac{|F(X) - F(X_0) - (X - X_0) \cdot \nabla F(X_0)|}{|X - X_0|} = 0, \quad (4)$$

$$\lim_{X \rightarrow X_0} \frac{|G(X) - G(X_0) - (X - X_0) \cdot \nabla G(X_0)|}{|X - X_0|} = 0. \quad (5)$$

Il punto (a) segue dalla disuguaglianza triangolare. Infatti,

$$\begin{aligned} &\lim_{X \rightarrow X_0} \frac{|(F + G)(X) - (F + G)(X_0) - (X - X_0) \cdot (\nabla F(X_0) + \nabla G(X_0))|}{|X - X_0|} \\ &\leq \lim_{X \rightarrow X_0} \frac{|F(X) - F(X_0) - (X - X_0) \cdot \nabla F(X_0)|}{|X - X_0|} \\ &\quad + \lim_{X \rightarrow X_0} \frac{|G(X) - G(X_0) - (X - X_0) \cdot \nabla G(X_0)|}{|X - X_0|} = 0. \end{aligned}$$

Per mostrare il punto (b), consideriamo il vettore

$$v = F(X_0)\nabla G(X_0) + G(X_0)\nabla F(X_0),$$

e scriviamo

$$\begin{aligned} & F(X)G(X) - F(X_0)G(X_0) - (X - X_0) \cdot \left(F(X_0)\nabla G(X_0) + G(X_0)\nabla F(X_0) \right) \\ &= G(X) \left(F(X) - F(X_0) - (X - X_0) \cdot \nabla F(X_0) \right) \\ &\quad + (X - X_0) \cdot \nabla F(X_0) \left(G(X) - G(X_0) \right) \\ &\quad + F(X_0) \left(G(X) - G(X_0) - (X - X_0) \cdot \nabla G(X_0) \right) =: (I) + (II) + (III). \end{aligned}$$

Ora, siccome G è differenziabile in X_0 , abbiamo che è anche continua in X_0 e quindi è localmente limitata, ovvero esistono $C > 0$ e $r > 0$ tali che

$$G(X) \leq C \quad \text{per ogni } X \in B_r(X_0).$$

Di conseguenza, usando la locale limitatezza di G e (4), otteniamo che

$$\lim_{X \rightarrow X_0} \frac{G(X) \left(F(X) - F(X_0) - (X - X_0) \cdot \nabla F(X_0) \right)}{|X - X_0|} = 0.$$

Per calcolare il limite

$$\lim_{X \rightarrow X_0} \frac{|(II)|}{|X - X_0|},$$

usiamo la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz e la continuità di G :

$$\lim_{X \rightarrow X_0} \frac{\left| (X - X_0) \cdot \nabla F(X_0) \left(G(X) - G(X_0) \right) \right|}{|X - X_0|} \leq \lim_{X \rightarrow X_0} |\nabla F(X_0)| \left| G(X) - G(X_0) \right| = 0.$$

Infine,

$$\lim_{X \rightarrow X_0} \frac{|(III)|}{|X - X_0|} = \lim_{X \rightarrow X_0} \frac{|F(X_0)| \left| G(X) - G(X_0) - (X - X_0) \cdot \nabla G(X_0) \right|}{|X - X_0|} = 0,$$

e quindi

$$\lim_{X \rightarrow X_0} \frac{|F(X)G(X) - F(X_0)G(X_0) - (X - X_0) \cdot v|}{|X - X_0|}. \quad \square$$

Corollario 7. *I polinomi sono funzioni differenziabili.*

UNA FUNZIONE CONTINUA E DERIVABILE MA NON DIFFERENZIABILE

In uno dei capitoli precedenti abbiamo visto un esempio di una funzione derivabile in ogni punto di \mathbb{R}^2 (zero compreso) ma con una discontinuità in zero. Il seguente è un esempio di una funzione continua e derivabile in ogni punto di \mathbb{R}^2 , ma non differenziabile in zero.

Esempio 8. *La funzione*

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

è continua su \mathbb{R}^2 , derivabile in ogni punto, zero compreso, ma non è differenziabile in $(0, 0)$.

Derivabilità. Fissato un $x \in \mathbb{R}$ diverso da zero, la funzione di una variabile $y \mapsto F(x, y)$ è derivabile in y . Analogamente, fissato un $y \in \mathbb{R}$ diverso da zero, la funzione di una variabile $x \mapsto F(x, y)$ è derivabile in x . Quindi basta verificare la derivabilità in $(0, 0)$. Siccome

$$\begin{cases} F(x, 0) = 0 & \text{per ogni } x \in \mathbb{R}, \\ F(0, y) = 0 & \text{per ogni } y \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

otteniamo che esistono e sono nulle le derivate parziali

$$\partial_x F(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(h, 0) - F(0, 0)}{h} = 0 \quad e \quad \partial_y F(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{F(0, k) - F(0, 0)}{k} = 0.$$

Continuità. La funzione xy che $|(x, y)| = \sqrt{x^2 + y^2}$ sono entrambe continue, quindi basta verificare che la funzione F sia continua in zero. In coordinate polari, $x = \rho \cos \theta$ e $y = \rho \sin \theta$, abbiamo che

$$F(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = \frac{\rho \cos \theta \rho \sin \theta}{\rho} = \rho \cos \theta \sin \theta.$$

Siccome, $\sin \theta$ e $\cos \theta$ sono funzioni limitate su $[0, 2\pi]$, abbiamo che

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \left\{ \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} |F(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) - F(0, 0)| \right\} \leq \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho = 0.$$

Di conseguenza, F è continua anche in $(0, 0)$.

Differenziabilità. Siccome abbiamo già dimostrato che la funzione F è derivabile in $(0, 0)$, abbiamo che:

$$F \text{ è differenziabile in } (0, 0) \Leftrightarrow \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{|F(x, y) - F(0, 0) - (x, y) \cdot \nabla F(0, 0)|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

Ora, siccome $F(0, 0) = 0$ e $\nabla F(0, 0) = (0, 0)$, abbiamo

$$F \text{ è differenziabile in } (0, 0) \Leftrightarrow \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{|F(x, y)|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

Si tratta quindi di studiare il limite

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{|F(x, y)|}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

In coordinate polari abbiamo

$$\frac{F(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \sin(2\theta).$$

Si ha quindi che

$$\sup_{\theta \in [0, 2\pi]} F(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = \frac{1}{2} \quad e \quad \inf_{\theta \in [0, 2\pi]} F(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = -\frac{1}{2}.$$

Di conseguenza

$$\limsup_{\rho \rightarrow 0} \left\{ \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} F(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \right\} = \frac{1}{2} \quad e \quad \liminf_{\rho \rightarrow 0} \left\{ \inf_{\theta \in [0, 2\pi]} F(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \right\} = -\frac{1}{2},$$

e quindi il limite

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{F(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

non esiste. Di conseguenza, F non è differenziabile in zero.

Esercizio 9. Quali delle funzioni seguenti sono differenziabili in zero ?

$$(1) xy + y^2 ; \quad (2) \sqrt{x^2 + y^2} ; \quad (3) \frac{x^2 y}{\sqrt{x^2 + y^2}} ; \quad (4) \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} .$$

FUNZIONI OMOGENEE DIFFERENZIABILI

Esercizio 10. Sia $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 1-omogenea e tale che $F(0) = 0$. Allora F è differenziabile in zero se e solo se

$$F(X) = v \cdot X$$

per un qualche vettore $v \in \mathbb{R}^d$.

Dimostrazione. Segue direttamente dai risultati della sezione precedente. Infatti, siccome $X_0 = 0$ e F è 1-omogenea, abbiamo che

$$F_r(X) := \frac{F(rX + X_0)}{r} = \frac{F(rX)}{r} = F(X).$$

Quindi

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left\{ \sup_{X \in B_1} |F_r(X) - v \cdot X| \right\} = \lim_{r \rightarrow 0} \left\{ \sup_{X \in B_1} |F(X) - v \cdot X| \right\} = \sup_{X \in B_1} |F(X) - v \cdot X|.$$

Di conseguenza F è differenziabile in zero se e solo se $F(X) = v \cdot X$. □

Esercizio 11 (F). Sia $P \in \mathbb{R}[x, y]$ un polinomio 2-omogeneo. Dimostrare che la funzione

$$F(x, y) = \frac{P(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

è continua, ma non è differenziabile in zero.

FUNZIONI DIFFERENZIABILI - ESERCIZI

Esercizio 12. Consideriamo la funzione $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Quali fra le affermazioni seguenti sono vere?

- (a) F è derivabile in zero.
- (b) $\nabla F(0, 0) = (0, 0)$.
- (c) Il gradiente in zero non è definito.
- (d) La funzione è differenziabile in zero.
- (e) Per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, la funzione

$$t \mapsto F(tx, ty)$$

è derivabile in zero.

- (f) F è continua in zero.

Esercizio 13. Consideriamo la funzione $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Quali fra le affermazioni seguenti sono vere?

- (a) F è derivabile in zero.
- (b) $\nabla F(0, 0) = (0, 0)$.
- (c) Il gradiente in zero non è definito.
- (d) La funzione è differenziabile in zero.
- (e) F è continua in zero.
- (f) F è limitata.

Esercizio 14. Consideriamo la funzione $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Quali fra le affermazioni seguenti sono vere?

- (a) F è derivabile in zero.
- (b) $\nabla F(0, 0) = (0, 0)$.
- (c) Il gradiente in zero non è definito.
- (d) La funzione è differenziabile in zero.
- (e) F è continua in zero.
- (f) F è limitata.

Esercizio 15. Consideriamo la funzione $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Quali fra le affermazioni seguenti sono vere?

- (a) F è derivabile in zero.
- (b) $\nabla F(0, 0) = (0, 0)$.
- (c) Il gradiente in zero non è definito.
- (d) La funzione è differenziabile in zero.
- (e) F è continua in zero.
- (f) F è limitata.

Esercizio 16. Consideriamo la funzione $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Quali fra le affermazioni seguenti sono vere?

- (a) F è derivabile in zero.
- (b) $\nabla F(0, 0) = (0, 0)$.
- (c) Il gradiente in zero non è definito.
- (d) La funzione è differenziabile in zero.
- (e) F è continua in zero.
- (f) F è limitata.

Esercizio 17. Consideriamo la funzione $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2 - yx^2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Quali fra le affermazioni seguenti sono vere?

- (a) F è derivabile in zero.
- (b) F è differenziabile in zero.
- (c) F è di classe C^1 in \mathbb{R}^2
- (d) F è di classe C^2 in \mathbb{R}^2
- (e) $\partial_{xy} F(0, 0) = \partial_{yx} F(0, 0)$.

Esercizio 18. Consideriamo la funzione $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2 \sqrt{|x|}}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Quali fra le affermazioni seguenti sono vere?

- (a) F è derivabile in zero.
- (b) $\nabla F(0, 0) = (0, 0)$.
- (c) Il gradiente in zero non è definito.
- (d) La funzione è differenziabile in zero.
- (e) F è continua in zero.
- (f) F è limitata in B_1 .

La seguente proposizione sarà utile per gli esercizi successivi.

Proposizione 19. Siano $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ e $G : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni tali che

$$F(0) = G(0) \quad e \quad F(X) - G(X) = o(|X|).$$

Allora, F è differenziabile in zero se e solo se lo è G .

Dimostrazione. Supponiamo che F sia differenziabile in zero, ovvero

$$\lim_{X \rightarrow 0} \frac{|F(X) - F(0) - X \cdot \nabla F(0)|}{|X|} = 0,$$

e che

$$F(0) = G(0) \quad e \quad \lim_{X \rightarrow 0} \frac{|F(X) - G(X)|}{|X|} = 0.$$

La differenziabilità di G , segue dalla disuguaglianza triangolare:

$$\begin{aligned} & \lim_{X \rightarrow 0} \frac{|G(X) - G(0) - X \cdot \nabla F(0)|}{|X|} \\ & \leq \lim_{X \rightarrow 0} \frac{|F(X) - F(0) - X \cdot \nabla F(0)|}{|X|} + \lim_{X \rightarrow 0} \frac{|G(X) - F(X)|}{|X|} = 0. \quad \square \end{aligned}$$

Esercizio 20. Consideriamo la funzione $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2 \sin x}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Quali fra le affermazioni seguenti sono vere?

- (a) F è derivabile in zero.
- (b) $\nabla F(0, 0) = (0, 0)$.
- (c) Il gradiente in zero non è definito.
- (d) La funzione è differenziabile in zero.
- (e) F è continua in zero.
- (f) F è limitata.

Esercizio 21. Consideriamo la funzione $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Quali fra le affermazioni seguenti sono vere?

- (a) F è derivabile in zero.
- (b) $\nabla F(0, 0) = (0, 0)$.
- (c) Il gradiente in zero non è definito.
- (d) La funzione è differenziabile in zero.
- (e) F è continua in zero.
- (f) F è limitata.

Esercizio 22. Consideriamo la funzione $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Quali fra le affermazioni seguenti sono vere?

- (a) F è derivabile in zero.
- (b) $\nabla F(0, 0) = (0, 0)$.
- (c) Il gradiente in zero non è definito.
- (d) La funzione è differenziabile in zero.
- (e) F è continua in zero.
- (f) F è limitata.

Esercizio 23. Consideriamo la funzione $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^4} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Quali fra le affermazioni seguenti sono vere?

- (a) F è derivabile in zero.
- (b) $\nabla F(0, 0) = (0, 0)$.
- (c) Il gradiente in zero non è definito.
- (d) F è differenziabile in zero.
- (e) F è continua in zero.

Esercizio 24. Consideriamo la funzione $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Quali fra le affermazioni seguenti sono vere?

- (a) F è derivabile in zero.
- (b) $\nabla F(0, 0) = (0, 0)$.
- (c) Il gradiente in zero non è definito.
- (d) F è differenziabile in zero.
- (e) F è continua in zero.

Esercizio 25. Consideriamo la funzione $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2 + y^4} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Quali fra le affermazioni seguenti sono vere?

- (a) F è derivabile in zero.
- (b) $\nabla F(0, 0) = (0, 0)$.
- (c) Il gradiente in zero non è definito.
- (d) F è differenziabile in zero.
- (e) F è continua in zero.

Dagli appelli precedenti

Esercizio 26 (Gennaio 2021 - versione 1). Consideriamo la funzione $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy^2)}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Quali delle affermazioni seguenti sono vere?

- (a) F è derivabile in zero.
- (b) $\nabla F(0, 0) = (0, 0)$.
- (c) Il gradiente in zero non è definito.
- (d) F è di classe C^1 su \mathbb{R}^2 .
- (e) F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
- (f) La funzione è differenziabile in zero.
- (g) F è continua su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$
- (h) F è continua in zero.
- (i) quando $v = (1, 1)$, la derivata direzionale $\partial_v F(0, 0)$ esiste ed è uguale a zero.
- (j) quando $v = (1, 1)$, la derivata direzionale $\partial_v F(0, 0)$ non esiste.
- (k) quando $v = (1, 1)$, la derivata direzionale $\partial_v F(0, 0)$ esiste ma è diversa da zero.

Esercizio 27 (Gennaio 2021 - versione 2). Consideriamo la funzione $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{xy} - 1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Quali delle affermazioni seguenti sono vere?

- (a) F è derivabile in zero.
- (b) $\nabla F(0, 0) = (0, 0)$.
- (c) Il gradiente in zero non è definito.
- (d) F è di classe C^1 su \mathbb{R}^2 .
- (e) F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
- (f) La funzione è differenziabile in zero.
- (g) F è continua su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$
- (h) F è continua in zero.
- (i) quando $v = (1, 1)$, la derivata direzionale $\partial_v F(0, 0)$ esiste ed è uguale a zero.
- (j) quando $v = (1, 1)$, la derivata direzionale $\partial_v F(0, 0)$ non esiste.
- (k) quando $v = (1, 1)$, la derivata direzionale $\partial_v F(0, 0)$ esiste ma è diversa da zero.

Esercizio 28 (Febbraio 2021 - versione 1). Consideriamo la funzione $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$F(0,0) = 0 \quad e \quad F(x,y) = \frac{x \sin(xy)}{x^2 + y^2} \quad \text{se } (x,y) \neq (0,0).$$

Quali delle affermazioni seguenti sono vere? Perché?

- (1) F è derivabile in zero;
- (2) $\nabla F(0,0) = (0,0)$;
- (3) Il gradiente in $(0,0)$ non è definito;
- (4) F è di classe C^1 su \mathbb{R}^2 ;
- (5) F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$;
- (6) F è differenziabile in zero;
- (7) F è continua su $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$;
- (8) F è continua in $(0,0)$;
- (9) se $v = (1,1)$, allora la derivata direzionale $\partial_v F(0,0) = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} F(tv)$ esiste ed è uguale a zero;
- (10) se $v = (1,1)$, allora la derivata direzionale $\partial_v F(0,0) = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} F(tv)$ non esiste;
- (11) se $v = (1,1)$, allora la derivata direzionale $\partial_v F(0,0) = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} F(tv)$ esiste ma è diversa da zero.

Esercizio 29 (Febbraio 2021 - versione 2). Consideriamo la funzione $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$F(0,0) = 0 \quad e \quad F(x,y) = \frac{\sin(xy)}{x^2 + y^2} \quad \text{se } (x,y) \neq (0,0).$$

Quali delle affermazioni seguenti sono vere? Perché?

- (1) F è derivabile in zero;
- (2) $\nabla F(0,0) = (0,0)$;
- (3) Il gradiente in $(0,0)$ non è definito;
- (4) F è di classe C^1 su \mathbb{R}^2 ;
- (5) F è di classe C^1 su $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$;
- (6) F è differenziabile in zero;
- (7) F è continua su $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$;
- (8) F è continua in $(0,0)$;
- (9) se $v = (1,1)$, allora la derivata direzionale $\partial_v F(0,0) = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} F(tv)$ esiste ed è uguale a zero;
- (10) se $v = (1,1)$, allora la derivata direzionale $\partial_v F(0,0) = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} F(tv)$ non esiste;
- (11) se $v = (1,1)$, allora la derivata direzionale $\partial_v F(0,0) = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} F(tv)$ esiste ma è diversa da zero.

Esercizio 30 (Aprile 2021 - versione 1). Consideriamo la funzione $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$F(0,0) = 0 \quad e \quad F(x,y) = \frac{x^2 \sin(2y)}{x^2 + y^2} \quad \text{se } (x,y) \neq (0,0).$$

Quali delle affermazioni seguenti sono vere? Perché?

- (1) F è derivabile in zero;
- (2) $\nabla F(0,0) = (0,0)$;
- (3) F è derivabile su \mathbb{R}^2 ;
- (4) F è derivabile su \mathbb{R}^2 e le sue derivate parziali $\partial_x F$ e $\partial_y F$ sono funzioni continue su \mathbb{R}^2 ;
- (5) F è derivabile su \mathbb{R}^2 , ma le sue derivate parziali $\partial_x F$ e $\partial_y F$ non sono funzioni continue su \mathbb{R}^2 ;
- (6) F è differenziabile in zero;
- (7) F è continua su \mathbb{R}^2 ;
- (8) F è continua in tutti punti di \mathbb{R}^2 tranne l'origine $(0,0)$;
- (9) se $v = (2,1)$, allora la derivata direzionale $\partial_v F(0,0) = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} F(tv)$ esiste ed è uguale a zero;
- (10) se $v = (2,1)$, allora la derivata direzionale $\partial_v F(0,0) = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} F(tv)$ non esiste;
- (11) se $v = (2,1)$, allora la derivata direzionale $\partial_v F(0,0) = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} F(tv)$ esiste ma è diversa da zero.

Esercizio 31 (Aprile 2021 - versione 2). Consideriamo la funzione $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$F(0,0) = 0 \quad e \quad F(x,y) = \frac{xy \cos(x)}{x^2 + y^2} \quad \text{se } (x,y) \neq (0,0).$$

Quali delle affermazioni seguenti sono vere? Perché?

- (1) F è derivabile in zero;
- (2) $\nabla F(0,0) = (0,0)$;
- (3) F è derivabile su \mathbb{R}^2 ;
- (4) F è derivabile su \mathbb{R}^2 e le sue derivate parziali $\partial_x F$ e $\partial_y F$ sono funzioni continue su \mathbb{R}^2 ;
- (5) F è derivabile su \mathbb{R}^2 , ma le sue derivate parziali $\partial_x F$ e $\partial_y F$ non sono funzioni continue su \mathbb{R}^2 ;
- (6) F è differenziabile in zero;
- (7) F è continua su \mathbb{R}^2 ;
- (8) F è continua in tutti punti di \mathbb{R}^2 tranne l'origine $(0,0)$;
- (9) se $v = (2,1)$, allora la derivata direzionale $\partial_v F(0,0) = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} F(tv)$ esiste ed è uguale a zero;
- (10) se $v = (2,1)$, allora la derivata direzionale $\partial_v F(0,0) = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} F(tv)$ non esiste;
- (11) se $v = (2,1)$, allora la derivata direzionale $\partial_v F(0,0) = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} F(tv)$ esiste ma è diversa da zero.

Esercizio 32 (Giugno 2021). Consideriamo la funzione $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + 5y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(a) Calcolare le derivate parziali $\partial_x F(0, 0)$ e $\partial_y F(0, 0)$.

(b) È vero che la funzione è differenziabile in $(0, 0)$? Perché?

Esercizio 33 (Giugno 2021). Consideriamo la funzione $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + 5y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(a) Calcolare le derivate parziali $\partial_x F(0, 0)$ e $\partial_y F(0, 0)$.

(b) È vero che la funzione è differenziabile in $(0, 0)$? Perché?

Esercizio 34 (Luglio 2021). Trovare una funzione $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tale che:

- F è differenziabile in ogni punto $(x, y) \neq (0, 0)$;
- F è continua in $(0, 0)$;
- F è derivabile in $(0, 0)$;
- F non è differenziabile in zero.

Spiegare perché la funzione trovata ha queste proprietà.

Esercizio 35 (Settembre 2021). Trovare una funzione $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tale che:

- F è continua e derivabile in $(0, 0)$;
- F non è differenziabile in zero.

Spiegare perché la funzione trovata ha queste proprietà.